مبرهنة:

ليكن $(E, \|.\|_E)$ و $(F, \|.\|_F)$ فضائين منظميين و T تطبيق خطي من E في F فإن الشروط التالية متكافئة:

1) التطبيق T مستمر بانتظام.
2) التطبيق T مستمر على E.
3) التطبيق T مستمر في النقطة 0.
4) التطبيق T محدود على الكرة المفتوحة $B(0,1)$ في E.
5) يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $\|T(x)\|_F \le k\|x\|_E$ وذلك أياً كان x من E.

البرهان:

$1 \Rightarrow 2$ واضح

$2 \Rightarrow 3$ واضح

$3 \Rightarrow 4$

لنفترض أن التطبيق T مستمر في النقطة 0 أي أن نهاية $\lim_{x \to 0} T(x) = T(0)$ وبما أن $T(0)=0$
فيقابل كل العدد الحقيقي موجب $\varepsilon = 1$ عدد حقيقي موجب δ بحيث إذا كان $u \in E$ فإن
$\|u\|_E < \delta$ فإن $\|T(u)\|_F < 1$ وإذا كان x عنصراً ما من $B(0,1)$ فإن
$d(T(u), T(0)) = \|T(u) - 0\|$ $\quad d(u,0) = \|u-0\|$

$\|x\|_E < 1$ ومنه $\|\delta x\|_E = \delta . \|x\|_E < \delta$ وبالتالي:

$$\|T(\delta x)\|_F = \|\delta . T(x)\|_F = \delta . \|T(x)\|_F < 1$$

$$\|T(x)\|_F < \frac{1}{\delta} = M$$

يوجد عدد حقيقي موجب $M = \frac{1}{\delta}$ بحيث أياً كان x من الكرة المفتوحة $B(0,1)$ من E فإن
$\|T(x)\|_F < \frac{1}{\delta} = M$ وهذا يعني أن التطبيق T محدود على الكرة $B(0,1)$

$4 \Rightarrow 5$ لنفترض أن التطبيق T محدود على الكرة $B(0,1)$ من E أي أنه يوجد عدد
حقيقي موجب M بحيث إذا كان y عنصراً ما من $B(0,1)$ من E فإن $\|$

$$\|T(y)\|_F \le M$$

• إذا كان x عنصراً ما من E بحيث $x \neq 0$ ووضعنا $y = \frac{x}{2\|x\|_E}$ فإننا نجد أن $\|y\|_E = \left\| \frac{x}{2\|x\|_E} \right\|_E$

$$= \frac{1}{2\|x\|_E} \cdot \|x\|_E = \frac{1}{2} < 1$$

(أي لا ضمن الكرة $B(0,1)$)

$$\|T(y)\|_F = \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|_E} \right) \right\|_F = \left\| \frac{1}{2\|x\|_E} T(x) \right\|$$

$$= \frac{1}{2\|x\|_E} \cdot \|T(x)\|_F \le M \Rightarrow \|T(x)\|_F \le 2M \cdot \|x\|_E$$

بوضع $K = 2M$ نجد $\|T(x)\|_F \le K\|x\|_E$

$(1 \Leftarrow 5)$

لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $\|T(x)\|_F \le k\|x\|_E$ لكل x من E

عندئذ يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ بحيث أنه، إذا كان x و y عنصرين من E يحققان $\|x - y\|_E < \delta$ فإن:

$$\|T(x) - T(y)\|_F = \|T(x-y)\|_F \le k\|x-y\|_E \le k \cdot \delta = \varepsilon$$

أي أن T مستمر بانتظام.

ملاحظة: (هامة وسهلة)

إذا كان E فضاءً متجهياً حقيقياً ذا بعد منته، فإن أي تطبيق خطي T من E في أي فضاء متجهي حقيقي منظم (F, N) يكون مستمراً.

البرهان:

لتكن $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدة لـ E ولنعرف على E النظيم:

$$\|\cdot\|: E \longrightarrow \mathbb{R}_+ ,\; x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longrightarrow \sup_{1 \le i \le n} |x_i|$$

عندئذ إذا كانت النقطتين $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ، $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ من E فإننا نجد:

$$N(T(x) - T(a)) = N(T(x - a))$$

$= N(T(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)e_i)) = N(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i).T(e_i))$

$\leq \sum_{i=1}^{n}|x_i - a_i| .N.(T(e_i)) \leq \sup_{1\leq i\leq n}|x_i - a_i| \sum_{i=1}^{n} N.T(e_i)$

$= k\|x - a\|$

حيث أن $k = \sum_{i=1}^{n} N.(T(e_i))$

ومنه نستنتج أن T مستمر لأنه من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ بحيث إذا كانت المسافة بين x و a أصغر من δ ; $\|x - a\|_E < \delta$ فإن المسافة بين صورتهما $d(T(x), T(a)) = N(T(x) - T(a))$

$\leq k\|x - a\|_E < k.\delta = \varepsilon$

ملاحظات.

1. نقول عن التطبيق الخطي T للفضاء المنظم E في الفضاء المنظم F أنه محدود إذا وجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $\|T(x)\|_F \leq k\|x\|_E ; \forall x \in E$
ونستنتج من برهنة سابقة (تكافؤ بين 2 و 5) أن الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق الخطي محدود هو أن يكون مستمراً.

2. إذا رمزنا بـ $L(E,F)$ لمجموعة التطبيقات الخطية المستمرة للفضاء المتجه الحقيقي E في الفضاء المتجه الحقيقي F، وزودنا هذه المجموعة بعمليتي جمع تطبيقين و جداء تطبيق بعدد حقيقي فإن $L(E,F)$ تصبح فضاء متجهاً حقيقياً.

نتيجة:

إذا كان $(E, \|.\|)$ و $(F, \|.\|)$ فضائين منظمين و T تطبيقاً خطياً مستمراً لـ E في F أي $T \in L(E,F)$ فإننا نستنتج مباشرة من مبرهنة سابقة (تكافؤ بين 2 و 5)
T مستمر $\Leftrightarrow$ يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون: $\|T(x)\|_F \leq k\|x\|_E$

/ /

إن المجموعة $\left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \right\}$; $x \in E - \{0\}$ محدودة بالفضع الآن من أجل أي تطبيق T من $L(E,F)$

$$\|T\| = \begin{cases} \sup \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} & ; E \neq \{0\} \\ 0 & ; E = \{0\} \end{cases}$$

لنثبت الأن أن الدالة :

$L(E,F) \longrightarrow R_+ ; T \longrightarrow \|T\|$ تعرف نظيماً على $L(E,F)$

1. واضح أن $\|T\| \geq 0$ وإذا كان صورة $\|T\| = 0$ فإنه يكون $\|T(x)\| = 0 \Leftarrow$ $T(x) = 0$ وذلك $\forall x \in E$ ومنه $T = 0$ (أي التطبيق الصفري)

2.

$$\|aT\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|a.T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{|a|.\|T(x)\|}{\|x\|}$$

$$= |a|. \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |a|. \|T\|$$

3. إذا كان T_1 ، T_2 عنصرين من $L(E,F)$ فعندئذٍ

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T_1(x) + T_2(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} = \|T_1\| + \|T_2\|$$

نتيجة:

إذا كان $(E, \|.\|)$ و $(F, \|.\|)$ فضائين منظمين فإن الدالة :

$$L(E,F) \longrightarrow R_+ ; T \longrightarrow \|T\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

تعرف على الفضاء $L(E,F)$ نظيماً يحقق

$$\|T\| \geq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

ومنه $\|T(x)\| \leq \|T\|.\|x\|$ وذلك أياً كان T من $L(E,F)$ وأياً كانت x من E.

مبرهنة:

إذا كانت E و F و G ثلاث فضاءات منظمة وكان $T \in L(E,F)$, $H \in L(F,G)$

فعندئذ: $\|H \circ T\| \leq \|H\| . \|T\|$

البرهان:

إذا كانت $E = \{0\}$ فالمتراجحة محققة.

لنفرض الآن أن $E \neq \{0\}$ عندئذ:

$$\|H \circ T\| = \sup_{x \in E-\{0\}} \frac{\|H(T(x))\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in E-\{0\}} \frac{\|H\| . \|T(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \|H\| . \sup_{x \in E-\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \|H\| . \|T\|$$

ملاحظة: إن النظيم على $L(E,F)$ يمكن أن يعرف أيضاً بالشكل:

$$\|T\| = \sup \{\|T(x)\| ; \|x\| = 1\}$$

/ /

تفاضل فريشة والدوال القابلة للمفاضلة والمشتقات الجزئية :

سندرس في هذا الفصل قابلية المفاضلة حسب فريشة لدوال من الشكل $f: D \to F$ ؛ $D \subseteq E$ حيث E و F فضاءان منظمان وسنركز على دراسة الدوال الحقيقية لعدة متغيرات أي على الحالة التي يكون فيها $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$ وعلى الدوال المتجهة لعدة متغيرات أي عندما يكون $E = \mathbb{R}^n$; $F = \mathbb{R}^m$.

تعريف : ليكن E و F فضائين متجهين حقيقيين منظمين ولتكن D مجموعة جزئية من E و a نقطة داخلية من D ؛ نقول عن الدالة $f: D \to F ; x \to f(x)$ أنها قابلة للمفاضلة حسب فريشة أو اختصاراً قابلة للمفاضلة في النقطة x إذا وجد تطبيق خطي مستمر $L: E \to F$ بحيث يكون :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|_E} \cdot [f(a+h) - f(a) - L(h)] = 0 \quad \text{---- } (1)$$

ملاحظات :

1. إن المساواة (1) تكافئ المساواة :

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \|h\|_E \cdot \varepsilon(h) \quad \text{---- } (2)$$

حيث ε دالة معرفة على جوار w للنقطة 0 في E وتأخذ قيمتها في F وتحقق الشرط :

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

2. إذا كان E ذا بعد منته فإن أي تطبيق خطي $L: E \to F$ يكون مستمراً (وذلك حسب مبرهنة سابقة).

تعريف : إذا كانت الدالة $f: D \to F$; $D \subseteq E$ قابلة للمفاضلة في النقطة الداخلية a من D ، فإننا نقول عن التطبيق الخطي المستمر $L: E \to F$ والذي يحقق المساواة (1) أنه تفاضل (أو مشتق) فريشة للدالة f في النقطة a ونرمز له df_a أو ب f_a

إذا كانت D مجموعة مفتوحة في E فإننا نقول عن الدالة $f: D \to F$ أنها قابلة للمفاضلة

على D إذا كانت قابلة للمفاضلة في كل نقطة من D وعندئذ نرمز ب df للدالة $df: D \longrightarrow L(E,F)\ ;\ x \longrightarrow df_x$ حيث $L(E,F)$ فضاء التطبيقات الخطية المستمرة المعرفة على E، ونقول عن df أنها تفاضل مرتبة أولا (اختصارا تفاضل f على D).

حالات خاصة:

1. إن الدالة الحقيقية لعدة متغيرات: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x=(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow f(x)$

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ و

تكون قابلة للمفاضلة في النقطة الداخلية $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ من D إذا وفقط إذا وجدت أعداد حقيقية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ بحيث يكون

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} A_j \cdot h_j}{\|h\|} = 0$$

أو:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} A_j \cdot h_j + \|h\| \cdot \varepsilon(h)$$

علما أن $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ وأن ε دالة حقيقية معرفة على جوار W للنقطة 0 من $\mathbb{R}^n$ ويحقق $\lim_{h=0} \varepsilon(h)=0$

وعندئذ $df_a(h) = \sum_{j=1}^{n} A_j \cdot h_j$

وبشكل خاص إذا كانت $n=2$ فإن الدالة الحقيقية لمتغيرين

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \longrightarrow f(x,y) \quad ; \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$$

تكون قابلة للمفاضلة في النقطة الداخلية (a,b) من D إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان A و B بحيث يكون:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

أو

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2} \cdot \varepsilon(h,k)$$

/ /

حيث أن $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k)=0$

-2- الدالة المعرفة بعدة متغيرات $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (مجموعة جزئية) ; $f : D \to \mathbb{R}^m$, $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \to f(X) \in \mathbb{R}^m$

تكون قابلة للمفاضلة عند النقطة الداخلية $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ إذا وفقط إذا وجدت أعداد حقيقية

ثابتة $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ من النوع $m\times n$ بحيث يكون $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{\|h\|}=0$ — ③

وعندئذ $df_a(h)=A\cdot h$ (حيث Ah يمثل جداء المصفوفة A بالمصفوفة العمودية

h التي عناصرها مركبات h).

Didat